CNED

DONG

Interne . Analyse Leçon 237 .
Soit E un espace vectoriel normé complet et soit $f : [a, b] \to E($ a et b sont deux réels avec $a < b$) une application continue. Votre question : Pourquoi la complétude de E est elle importante pour que la fonction

$$F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

soit une primitive de f sur $[a, b]$?
C'est une question très naturelle ! Si je vous donne une simple réponse , ce sera :
Sinon, l'intégrale de f sur un segment ne sera pas définie, donc F non plus, alors d'où vient la question de primitive posée sur F ?

Ah, je dois vous rappeller un nom très courant des espaces vectoriels normés complets *espace de Banach.*
Nous sommes donc amenés à répondre à la question suivante:

quelle est l'importance de la complétude d'un espace de Banach E pour la définition de l'intégrale I d'une application continue $f : [a, b] \to E($ a et b sont deux réels avec $a < b$) sur ce segment $[a, b]$, notée $I = \int_a^b f(t)dt$?
E peut être réel ou complexe, la solution ne change guère . Supposons donc E réel.
Considérons d'abord le cas le plus simple , E est égal au corps $\mathbb{R}$. L'intégrale I est définie comme la limite de somme de Riemann de f relative à une subdivision de $[a, b]$ lorsque son pas tend vers zéro. Si E n'est pas complet, l'existence de cette limite ne sera pas assurée. L'intégrale I peut se définir aussi comme la sup de la famille des petites sommes de Darboux de f sur $[a, b]$, et l'inf de la famille de ses grandes sommes de Darboux sur le même intervalle , qui sont égales (Voir Cours de Mathématiques Spéciale , Tome 2 . Bernard Gostiaux , Edition Puf). Cette définition a utilisé les propriétés: toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet sup dans $\mathbb{R}$, et toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet inf dans $\mathbb{R}$, c'est grâce à la complétude de $\mathbb{R}$. Par exemple , ces propriétés ne seront plus vraies si dans leurs énoncés on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.
Dans le cas général, c'est la première définition qui se généralise . Je vous précise quelques conceptions et vous énonce une série de lemmes, vous pourrez donc suivre ma piste pour

achèver une définition rigoureuse de l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$, et pendant ce temps -là, vous verrez que sans complétude de E, on sera bloqué .
Pour une subdivision $d = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$), le pas $\delta = \delta(d)$ est le maximum des amplitudes $x_i - x_{i-1}$ d'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et l'oscillation $\omega_f(d)$ est définie par

$$\omega_f(d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \max_{t,t' \in [x_{i-1}, x_i]} ||f(t') - f(t)||.$$

Nous convenons que toute subdivision est du segment$[a, b]$ et que toute somme de Riemann appartient à la fonction f .

Lemme 1 .Lorsque le pas $\delta(d)$ de la subdivision d tend vers zéro, on a $\omega_f(d) \to 0$, précisement dit:

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall \text{ subdivision } \quad d \text{ avec } \quad \delta(d) < \alpha, \quad \omega_f(d) < \epsilon.$$

(f est uniformément continue sur $[a, b]$).

Lemme 2 .Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour toutes subdivisions d et d' avec d' plus fine que d , on ait

$$\delta(d) < \alpha \Rightarrow \text{ la distance entre deux sommes de Riemann respectivement}$$

$$\text{relatives à } \quad d \quad \text{et à } d'\text{est inférieure à } \quad \epsilon.$$

Lemme 3 .Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour deux subdivisions d_1 et d_2 , on ait

$$\delta(d_1) \text{ et } \delta(d_1) < \alpha \Rightarrow \text{ la distance entre deux sommes de Riemann respectivement}$$

$$\text{relatives à } \quad d_1 \quad \text{et à } d_2\text{est inférieure à } \quad \epsilon.$$

Lemme 4 .Soient $(d_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de subdivisions et $(S_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de sommes de Riemann relative à $(d_k)_{k \geqslant 0}$ (pour tout $k \geqslant 0$, S_k est relative à d_k). Si $\delta(d_k) \to 0$ lorsque k tend vers l'infini , alors S_k converge vers un $S \in E$.
(Vous voyez une suite de Cauchy dans E complet)
Après que vous êtes convaincu , je voudrais vous demander, pour un espace vectoriel normé non complet E, si on peut encore envisager cette intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$? $\square$